

3. DERIVADAS EN R

3.1. DEFINICIÓN Y CÁLCULO

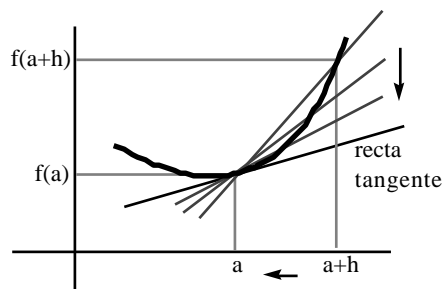
Def: La función f es derivable en a (punto interior al $\text{dom}f$) si existe el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
En ese caso el límite se representa por $f'(a)$ y se llama derivada de f en a .

Dos aplicaciones.

Pendiente de la tangente a una curva: $[f(a+h)-f(a)]/h$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$. Cuando $h \rightarrow 0$, la secante tiende hacia la recta tangente y su pendiente tiende hacia $f'(a)$. Así pues, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto a es (si $f'(a)$ existe, claro):

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Velocidad instantánea: si $d(t)$ es la distancia recorrida por un móvil en el instante t , $[d(a+h)-d(a)]/h$ es su velocidad media en el intervalo de tiempo $[a, a+h]$ y, por tanto, $d'(a)$ es su velocidad en el instante $t=a$.



Se llama f' , función derivada de f , a la que hace corresponder a cada $x \in \text{dom}f$ en que es derivable el valor $f'(x)$; $f''(a)$ será la derivada de $f'(x)$ en el punto a y f'' la función derivada de f' ; ... En general, $f^{(n)}$ es la función derivada de $f^{(n-1)}$ [definida en los $x \in \text{dom}f^{(n-1)}$ tales que existe $f^{(n)}(x)$].

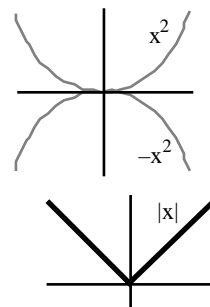
[otra notación famosa es la de Leibniz: $f' = \frac{df}{dx}$, $f'(a) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=a}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$]

Ejemplos: $f(x)=c$ es derivable para todo a y $f'(a)=0$ ya que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$.

$g(x)=x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(0)=0$ es derivable en $x=0$ porque existe $g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} [h \sin \frac{1}{h}] = 0$.

(Era de esperar que lo fuese, pues las tangentes oscilan, pero acercándose a $y=0$. Para $x \neq 0$ también va a existir f' ; es difícil verlo con la definición, pero pronto será muy sencillo).

$h(x)=|x|$ Si $a>0$, $h'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} = 1$; si $a<0$, $h'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a-h+a}{h} = -1$. Pero $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$ no existe y por tanto no es derivable en $x=0$. Sin embargo, sí existen los límites laterales.



Def: $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (derivadas por la derecha e izquierda, respectivamente)

Está claro que f es derivable en a si y sólo si existen y coinciden $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$.

Para $h(x)=|x|$, existen las derivadas laterales en 0 pero no coinciden: $h'(0^+) = 1$, $h'(0^-) = -1$.

Teor: f derivable en a \iff f continua en a Hay funciones continuas no derivables (el valor absoluto, por ejemplo; tienen "picos").

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h)-f(a)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h = f'(a) \cdot 0 = 0 \quad f \text{ continua en } a$$

Con el siguiente teorema podremos calcular casi todas las derivadas sin necesidad de acudir a la definición:

Teor: Si f y g son derivables en a entonces $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ son derivables en a y se tiene:
 $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$; $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$; $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
 si además $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ son derivables en a y $(\frac{1}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}$; $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$
 g derivable en a y f derivable en $g(a)$ \implies $f \circ g$ derivable en a y $(f \circ g)' = f'[g(a)] \cdot g'(a)$. [regla de la cadena]
 f derivable en $f^{-1}(b)$ y $f'[f^{-1}(b)] \neq 0$ \implies f^{-1} derivable en b y $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}$.

c.f es un caso particular de f.g ; de c.f y de la suma se deduce la de $f-g=f+(-1).g$. Las demás:

$$\boxed{f+g} \quad \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \quad f'(a)+g'(a) \text{ si } h \rightarrow 0$$

$$\boxed{f \cdot g} \quad \frac{(f \cdot g)(a+h)-(f \cdot g)(a)}{h} = f(a+h) \frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a) \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad f'(a)g(a)+f(a)g'(a) \text{ si } h \rightarrow 0 \text{ (f continua en a)}$$

$$\boxed{1/g} \quad \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a)g(a+h)} = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} \text{ si } h \rightarrow 0 \text{ (g continua en a; } g(a) \neq 0 \text{ } g(a+h) \neq 0 \text{ si } h \text{ pequeño)}$$

$$\boxed{f/g} \quad \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g(a)} - f(a) \frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

$$\boxed{f \circ g} \quad \frac{f[g(a+h)]-f[g(a)]}{h} = \frac{f[g(a)+g(a+h)-g(a)]-f[g(a)]}{g(a+h)-g(a)} \cdot \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'[g(a)] \cdot g'(a), \text{ ya que } k=g(a+h)-g(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

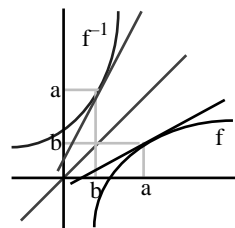
por ser g continua. [Esta demostración necesita correcciones (ver Spivak), pues $g(a+h)-g(a)$ podría hacerse 0 infinitas veces para valores muy pequeños de h]

$\boxed{f^{-1}}$ Sea $b=f(a)$; por ser $f'(a) \neq 0$ la función es inyectiva (y existe f^{-1}) en un entorno de a ; por tanto, para cada h pequeño hay un único k tal que $f(a+k)=b+h$. Por lo anterior:

$$\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h} = \frac{f^{-1}(f(a+k))-a}{b+h-b} = \frac{k}{f(a+k)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Las dos últimas reglas de derivación adoptan una forma sugerente, pero imprecisa, con la notación de Leibniz:

$$\text{si } z=g(y), y=f(x) : \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \Bigg| \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ si } \frac{dx}{dy} \neq 0$$



Derivadas de las funciones elementales:

$\boxed{x^b}' = bx^{b-1}$ para todo b real, $x > 0$. Podemos ya demostrarlo si b es racional. Varios pasos:

Si $b=n \in \mathbf{N}$ [la fórmula es válida entonces $x \in \mathbf{R}$], por inducción: cierto para $n=1$: $1=[x^1]'=1x^{1-1}=1$ supuesto cierto para $n-1$: $[x^n]'=[x \cdot x^{n-1}]' = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}$, cierto para n .

Si $b=0$ está visto. Si $b=-n$, $n \in \mathbf{N}$, $\left[\frac{1}{x^n}\right]' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$ [válido $x \neq 0$]

Si $b=\frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $x^{1/n}$ es la inversa de x^n y por tanto $[x^{1/n}]' = \frac{1}{n[x^{1/n}]^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{(1-n)/n}$

Si $b=\frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbf{Z}$, $[(x^{1/n})^m]' = m(x^{1/n})^{m-1} \frac{1}{n} x^{(1-n)/n} = \frac{m}{n} x^{(m-n)/n}$

$$\boxed{[\log|x|]' = \frac{1}{x}} \quad , \quad x > 0 : [\log x]' = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \text{ por teoremas de integrales; si } x < 0, [\log(-x)]' = \frac{-1}{-x}$$

$$\boxed{[e^x]' = e^x, \quad x \in \mathbf{R} \quad \Bigg| \quad [b^x]' = b^x \log b, \quad x \in \mathbf{R}, b > 0 \quad \Bigg| \quad [\log_b x]' = \frac{1}{x \log b}, \quad x > 0, b > 0, b \neq 1}$$

$$e^x \text{ inversa de } \log x \quad [e^x]' = \frac{1}{1/e^x} ; [e^{x \log b}]' = e^{x \log b} \log b ; \left[\frac{\log x}{\log b}\right]' = \frac{1}{x \log b}$$

Además se deduce: $[x^b]' = [e^{b \log x}]' = \frac{b}{x} e^{b \log x} = bx^{b-1}$ para cualquier b real.

$$\boxed{[\operatorname{sh} x]' = \operatorname{ch} x, [\operatorname{ch} x]' = \operatorname{sh} x, [\operatorname{th} x]' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x \quad x \in \mathbf{R}}$$

Las primeras triviales. Entonces $\left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right]' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$ y como sabemos $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$$\boxed{[\operatorname{sen} x]' = \operatorname{cos} x, [\operatorname{cos} x]' = -\operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbf{R} \quad \Bigg| \quad [\tan x]' = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad x \in \mathbf{R} + k\pi}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{2}{h} \operatorname{sen} \frac{h}{2} \operatorname{cos} \left(x + \frac{h}{2}\right) \rightarrow \operatorname{cos} x ; [\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})]' = \operatorname{cos}(x+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} x ; \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}\right]' = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x}$$

$$\boxed{[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, [\operatorname{arccos} x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \quad \Bigg| \quad [\operatorname{arctan} x]' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}}$$

$$[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{\operatorname{cos}(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)}} ; [\operatorname{arccos} x]' = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\operatorname{arccos} x)} ; [\operatorname{arctan} x]' = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{arctan} x)}$$

Def:

Se dice que f es derivable en un intervalo abierto I [finito o infinito] si es derivable en todos los puntos del intervalo; f es de clase 1 en I [$f \in C^1(I)$] si además f' es continua en I . Diremos que $f \in C^n(I)$ [de clase n] si f posee n derivadas en I y $f^{(n)}$ es continua en I , y que $f \in C(I)$ [de clase infinito] si existen derivadas de cualquier orden de f en I .

[Para intervalos cerrados, como siempre, hay que preocuparse de los extremos:

f es derivable en $[a,b]$ si lo es en (a,b) y existen $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$;

$f \in C^1[a,b]$ si $f \in C^1(a,b)$, $f'(x) = f'(a^+)$ si $x = a^+$ y $f'(x) = f'(b^-)$ si $x = b^-$].

Todas las funciones elementales de 2.1 son de C en su dominio, con excepción de $\arcsen x$ y $\arccos x$ [que no tienen derivada en $x = \pm 1$], y x^b con $b > 0$ y b no entero [para la que $f^{(n)}$ no existe en $x = 0$ cuando el exponente de $f^{(n-1)}$ pasa a estar entre 0 y 1; por ejemplo: $f(x) = x^{7/3}$, $f'(x) = \frac{7}{3} x^{4/3}$, $f''(x) = \frac{28}{9} x^{1/3}$ x , pero $f'''(0)$ ya no existe].

Ejemplos: Ya es fácil hallar la derivada de cualquier función, salvo en casos excepcionales. Así, para la g de antes:

$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(0) = 0$ g' existe x ; si $x \neq 0$ (producto de composiciones de derivables), $g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ (además $g'(0) = 0$ que sólo salía de la definición porque un denominador se anula).

g' no es continua en 0 porque g' no tiene límite: si $x \neq 0$, $2x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ pero $\cos \frac{1}{x}$ no tiende a nada

[por ejemplo, porque las sucesiones $\{a_n\} = \frac{1}{2n}$ y $\{b_n\} = \frac{1}{2n-1}$ tienden a 0 pero $f(a_n) = 1$ y $f(b_n) = -1$].

Por tanto, a pesar de ser g derivable en todo \mathbf{R} , no es de $C^1(\mathbf{R})$ [sí lo es en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$].

Como g' no es continua en 0, no puede existir $g''(0)$. Para cualquier $x \neq 0$ sí existen derivadas de todos los órdenes: $g''(x) = \left[2 - \frac{1}{x^2}\right] \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x}$, $g'''(x)$, ... [es decir, es de C en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$].

$$k(x) = \left[\frac{\log[7 + \operatorname{ch}^2(3^x + x)]}{5 + \arctan(x-2)} \right]^{1/3}$$

Es derivable x , pues es suma, producto, composición, ... de funciones derivables (el logaritmo se evalúa en valores mayores que 7, el denominador es mayor que 0 y el corchete gordo no se anula).

Sabemos calcular su derivada a pesar de su aspecto tan complicado (no con la definición, desde luego):

$$k'(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{\log[7 + \operatorname{ch}^2(3^x + x)]}{5 + \arctan(x-2)} \right]^{-2/3} \frac{\frac{2 \operatorname{ch}(3^x + x) \operatorname{sh}(3^x + x) (3^x \log 3 + 1)}{7 + \operatorname{ch}^2(3^x + x)} [5 + \arctan(x-2)] - \frac{\log[7 + \operatorname{ch}^2(3^x + x)]}{1 + (x-2)^2}}{[5 + \arctan(x-2)]^2}$$

$m(x) = x |x - x^2|$ es continua x por ser producto de composiciones de continuas x [$|x|$ lo es].

Sólo puede dejar de ser derivable cuando se anule el valor absoluto. Para precisarlo, tenemos que discutirlo:

$$m(x) = \begin{cases} x^2 - x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^3 - x^2 & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1] \end{cases} \quad m'(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 3x^2 - 2x & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1] \end{cases} \quad m''(x) = \begin{cases} 2 - 6x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 6x - 2 & \text{si } x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1] \end{cases}$$

Utilizando las expresiones del intervalo adecuado deducimos que:

$m'(0^-) = 0 = m'(0^+)$, m es derivable en $x = 0$; $m'(1^-) = -1 \neq m'(0^+) = 0$, m no es derivable en $x = 1$.

$m''(0^-) = -2 \neq m''(0^+) = 2$, m'' no existe si $x = 0$; tampoco existe si $x = 1$ por ser m' discontinua.

$n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$, $n(0) = \frac{\pi}{2}$ (continua). Si $x \neq 0$ podemos hallar fácilmente $n'(x) = \frac{-2x}{x^4 + 1}$, $n''(x) = 2 \frac{3x^4 - 1}{[x^4 + 1]^2}$, ...

Para hallar $n'(0)$ encontramos un límite indeterminado $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\arctan \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{2} \right]$ que aún no sabemos hacer.

Está claro que $n'(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, pero de ahí no podemos deducir (todavía) que $n'(0) = 0$ (pues nadie nos garantiza que n' sea continua; al final de 3.2 veremos un teorema que nos permitirá dar ese paso). n (admitiendo que $n'(0) = 0$) es de $C(\mathbf{R})$, pues existen n' , n'' , n''' , ... (denominadores no nulos).

$p(x) = x^x = e^{x \log x}$ ($= [e^{\log x}]^x$; escribiremos siempre $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log[f(x)]}$ para trabajar con ella).

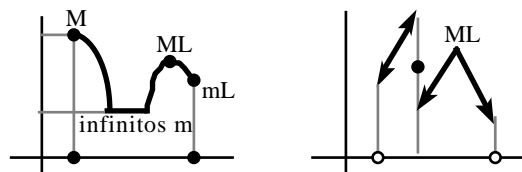
Así pues, $p'(x) = e^{x \log x} [\log x + 1]$; $p''(x) = e^{x \log x} \left([\log x + 1]^2 + \frac{1}{x} \right)$; ...

3.2. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

Los primeros resultados están destinados a determinar los x de un conjunto $A \subset \text{dom} f$ en los que una función f alcanza sus valores máximo y mínimo (a ambos se les llama valores extremos de A). Sabemos que si A es un intervalo cerrado y f es continua existen los valores extremos de f en A (es decir, existen $y, z \in A$ tales que $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ para todo $x \in A$), aunque podría no haberlos si A es otro tipo de conjuntos o si f no es continua. En ocasiones se llama a estos valores máximo y mínimo absolutos, para distinguirlos de los locales o relativos:

Def: f posee un máximo [mínimo] local en x sobre un conjunto $A \subset \text{dom} f$ si existe un $\delta > 0$ tal que el valor máximo [mínimo] de f en $A \cap B(x, \delta)$ se alcanza en x ; es decir, si $f(x) \geq f(x+h)$ [$f(x) \leq f(x+h)$] $\forall h$ tal que $|h| < \delta$ y $x+h \in A$.

Está claro que si un valor extremo (absoluto) de f en A se alcanza en un punto x también tiene f en ese x un extremo local y que lo contrario no es cierto. Los máximos y mínimos (absolutos y locales) pueden ser infinitos o no existir, pueden darse en el borde o en el interior de A . En este último caso:



Teor: Si f posee un extremo local en un x interior a A y f es derivable en x , entonces $f'(x)=0$

Si ML en x : tal que: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ and $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ then $f'(x) = 0$

Si mL en x : $-f$ is ML, derivable, then $f'(x) = 0$

Hay x con $f'(x)=0$ en los que f no tiene extremo local (por ejemplo $f(x)=x^3$ en $x=0$). Tampoco es cierto que en todo punto en el que f posea un extremo local deba cumplirse $f'(x)=0$ (pues x podría no ser interior o f no ser derivable en x). De todo lo anterior se sigue que:

Para buscar los valores máximo y mínimo de una f en un intervalo $[a,b]$ hay que considerar:

- los extremos a y b
- los $x \in (a,b)$ en los que $f'(x)=0$
- los x para los que no exista $f'(x)$

Comparando los valores de f en cada punto se hallan entonces los extremos (si existen; si la función es discontinua o el intervalo, por ejemplo, no es de longitud finita las cosas se pueden complicar)

Ejemplo: Hallemos los valores máximo y mínimo de $f(x)=\log(1+x^2)-|x-2|$ en el intervalo $[-2,3]$.

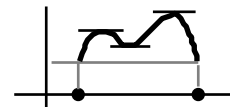
Tales valores han de existir por ser f continua en ese intervalo. f sólo no es derivable en $x=2$.

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2)-x+2, & x \geq 2 \\ \log(1+x^2)+x-2, & x < 2 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} -(1-x^2)/(1+x^2), & x > 2 \\ (1+x^2)/(1+x^2), & x < 2 \end{cases} \quad f'(x) = 0 \quad x = -1$$

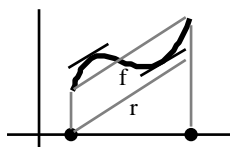
Con calculadora: $f(-2) \approx -2.4$, $f(3) \approx 1.3$, $f(2) \approx 1.6$, $f(-1) \approx -2.3$ el máximo se da en $x=2$ y el mínimo en $x=-2$.

Teor de Rolle: Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ con $f'(c)=0$

f tiene máximo y mínimo en $[a,b]$ por ser continua. Si alguno de los dos lo toma en (a,b) ya estaría. Si f toma su máximo y su mínimo en a y b f es constante $f'(x)=0$ para cualquier x de (a,b) .



Teor del valor medio: Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



(existe al menos un c para el que la tangente es paralela a la recta que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$; o bien, existe un instante c en el que la velocidad instantánea coincide con la media en el intervalo)

Sea $h(x)=f(x)-r(x)$, con $r(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. h continua $[a,b]$, derivable (a,b) , y $h(a)=f(a)-r(a)=0$ y $h(b)=f(b)-r(b)=0$. Por Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$.

Crecimiento y decrecimiento:

Teor :

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) . Entonces:
 si $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b) , f es estrictamente creciente en $[a,b]$,
 si $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b) , f es estrictamente decreciente en $[a,b]$,
 si $f'(x) = 0$ para todo x de (a,b) , f es constante en $[a,b]$.

Sea $[x,y] \subset [a,b]$. Por valor medio $c \in (x,y)$ con $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Si $f'(c) >, <, = 0$ $f(y) >, <, = f(x)$

[Observemos que a la f' se le piden cosas sólo en el intervalo abierto, pero el resultado se tiene en el cerrado; se ve en la demostración que podemos sustituir en la hipótesis y conclusiones $[a,$ por $(-,$ y $]b]$ por $,)$].

Como $f \in C^1[a,b]$ f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , se podría pedir simplemente a las f de los teoremas que fuesen de C^1 . Pero pediríamos demasiado, y dejaríamos fuera funciones como $f(x) = x^{1/2}$, que no es $C^1[0,1]$ pero sí es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ (y por tanto sí se le puede aplicar, por ejemplo, el teorema del valor medio).

Ejemplo. Estudiemos en qué intervalos crece y decrece la función $g(x) = \frac{x^3 - 6x^2 - 8}{x}$, continua si $x \neq 0$.

Como $g'(x) = [\text{mejor así}] = 2x - 6 + \frac{8}{x^2} = 2 \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = [\text{pronto repasaremos polinomios}] = 2 \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2}$,
 entonces $g' > 0$ si $x \in (-1,0) \cup (0,2) \cup (2, \infty)$ y $g' < 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,0)$. Del teorema deducimos que g decrece en $(-\infty, -1]$ y que crece en $[-1,0)$ y en $(0, \infty)$ [$x=2$ incluido; pero no crece en todo $[-1, \infty)$ (en 0 es discontinua)].
 Por tanto, tiene un mínimo local en $x=-1$ y no tiene ni máximo ni mínimo en $x=2$ (a pesar de que $g'=0$).

Condición suficiente de extremo:

Teor :

Sea f de C^2 en un entorno de c y sea $f'(c)=0$. Entonces:
 si $f''(c) > 0$, f posee un mínimo local en c ,
 si $f''(c) < 0$, f posee un máximo local en c .

(si $f''(c)=0$ podría haber en c un máximo, un mínimo o ninguna de las dos cosas)

$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)-f'(c)}{h} > 0$ para h pequeño $f'(c+h)$ y h tienen el mismo signo, con lo que f decrece en un intervalo a la izquierda ($h < 0$) y crece en uno a la derecha ($h > 0$). [Igual la otra]

Para la g de arriba $g''(x) = 2 - 16x^{-3}$ $g''(-1) = 18$ (mínimo, como ya sabíamos sin calcular la g''),
 $g''(2) = 0$ (??, pero la g' nos dijo que ni máximo ni mínimo).

Concavidad y convexidad:

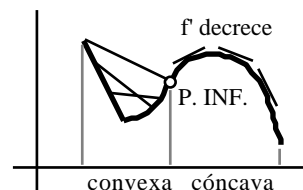
Def:

f es convexa hacia abajo en un intervalo I si $x, y \in I$ el segmento que une $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$ está por encima de la gráfica de f . f es cóncava si $-f$ es convexa. Se llama punto de inflexión a un punto de la gráfica en la que ésta pasa de convexa a cóncava o viceversa.

[Hay libros que llaman cóncava a lo que nosotros llamamos convexa y viceversa; otros, dicen que se dobla hacia arriba (), o hacia abajo ()].

Teor:

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable dos veces en (a,b) . Si $f'' \neq 0$ ($f'' = 0$) en (a,b) , f es convexa (cóncava) en $[a,b]$. Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f , debe ser $f''(c) = 0$.



[no lo demostramos; geoméricamente está claro: f es convexa si la pendiente de la tangente va creciendo (y si $f'' > 0$, la f' crece); es cóncava si decrece; en un punto de inflexión hay un máximo o mínimo de la f' (pasa de crecer a decrecer o al revés); puede ocurrir que $f''(c)=0$ y que en $(c, f(c))$ no haya punto de inflexión como ocurre con $f(x)=x^4$ en $x=0$]

Para la g era $g''(x) = \frac{2[x^3-8]}{x^3}$: es convexa en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$ y cóncava en $(0, 2)$. $x=2$ es punto de inflexión.

Teor:

Si f es continua en a y f' tiene límite cuando $x \rightarrow a$ $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$

TVM en $[a, a+h]$ $x_h \in (a, a+h)$ tal que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(x_h)$. Si $h \rightarrow 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightarrow f'(a)$ y $x_h \rightarrow a$.

[si $f'(x)$ ó $-$ en la demostración se ve que $f'(a)$ no existe (la pendiente se pone vertical), pero recordemos que puede no existir el límite de f' y ser la f derivable en a (que hay funciones derivables que no son C^1); este teorema prueba que la función n de la sección anterior es derivable en $x=0$ y que $n'(0)=0$].

3.3. POLINOMIOS

Un tipo de funciones que aparecen continuamente son los polinomios. Más adelante aproximaremos cualquier función más complicada mediante polinomios de coeficientes reales. Repasamos brevemente varias de sus propiedades.

Un polinomio de grado n es: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_k \in \mathbf{R}$ y $a_n \neq 0$.

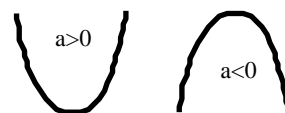
El polinomio más sencillo (cuya gráfica no sea una recta) es el de segundo grado $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Podemos poner $P_2(x) = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, siendo $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante).

Su gráfica es (ver 3.5) la de la parábola $y = x^2$ trasladada a izquierda o derecha, multiplicada por una constante (positiva o negativa) y trasladada arriba o abajo.

Es claro que su extremo se alcanza en $x = -b/2a$ (o a partir de $P_2'(x) = 2ax + b$).

Sus raíces vienen dadas por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. El tipo de raíces de $P_2(x)$ depende del signo de Δ . Si $\Delta > 0$ tiene dos reales y distintas, si $\Delta = 0$ tiene una raíz doble real y si $\Delta < 0$, dos raíces complejas conjugadas ($p \pm qi$). Observemos que la raíz doble $-\frac{b}{2a}$ también es raíz de $P_2'(x)$. Conocidas sus raíces x_1 y x_2 puede escribirse $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.



Un polinomio de grado 2 puede tener o no raíces reales. Lo mismo sucede con cualquiera de grado par. Sin embargo:

Un polinomio de grado impar posee por lo menos una raíz real.

En efecto, $P_n(x) = a_n x^n [1 + \dots + a_0 x^{-n}]$ y supongamos que $a_n > 0$. Entonces, si n es impar, $P_n(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $P_n(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Existen por tanto a con $P_n(a) < 0$ y b con $P_n(b) > 0$. Por Bolzano, existe $c \in (a, b)$ con $P_n(c) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra:

Todo polinomio de grado n posee n raíces (reales o complejas, repetidas o no).

Si x_1, \dots, x_n son dichas raíces, se puede entonces descomponer, en principio: $P_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Es muy fácil ver que si un polinomio de coeficientes reales tiene la raíz compleja $p + qi$ entonces también tiene la raíz $p - qi$. Cada pareja de productos $(x - [p + qi])(x - [p - qi])$ en la descomposición de $P_n(x)$ da entonces lugar a un polinomio de segundo orden con coeficientes reales $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$. Así pues, siempre se puede escribir:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_r)(x^2 + b_1x + c_1) \dots (x^2 + b_sx + c_s), \text{ con } r + 2s = n, x_k, b_k, c_k \in \mathbf{R}$$

Algunas de estas raíces podrían estar repetidas. No es difícil ver que si $x = x_k$ es raíz simple de P_n entonces no anula la derivada P_n' y que sí la anula si es raíz múltiple. Por tanto:

Una raíz de un polinomio es múltiple si y sólo si es raíz también de su derivada.

Y, por tanto, una raíz múltiple es raíz del máximo común divisor de P_n y P_n' . Una forma de calcularlo es mediante el algoritmo de Euclides: dados P, Q [con $\text{gr}(P) \geq \text{gr}(Q)$], se divide P entre Q y se llama R_1 al resto obtenido (si conviene, multiplicado por una constante); a continuación se divide Q entre R_1 y se llama R_2 al nuevo resto; luego R_1 entre R_2 ... hasta obtener un resto nulo. Entonces el m.c.d.(P, Q) es el último resto no nulo del proceso anterior.

Por ejemplo, para $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ [$P' = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 4$] es $R_1 = x^2 + 3x + 2$, $R_2 = x + 1$, $R_3 = 0$.

Por tanto, m.c.d.(P, P') = $x + 1$, con lo que P tiene $x = -1$ como raíz doble [de hecho, $P = (x + 1)^2(x^2 + 2)$].

En las pocas ocasiones en que un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces enteras, son muy fáciles de encontrar:

Una raíz entera de $P_n(x)$, si existe, se encuentra entre los divisores del término independiente a_0 .

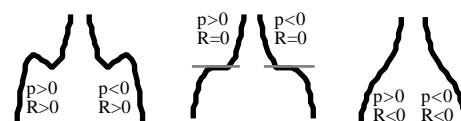
Ya que si c es raíz entera, entonces $a_0 = -c[a_n c^{n-1} + \dots + a_1]$, con lo que a_0 es múltiplo de c .

Por ejemplo, $P^*(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 6$ no tiene raíces enteras, pues no lo son $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ ni 6 .

Nos gustaría que existiesen fórmulas para el cálculo de las raíces de los polinomios de cualquier grado similares a las de los de segundo grado. De hecho, hacia 1500 se descubrieron fórmulas para las raíces de los de tercer y cuarto grado (pronto veremos, sin demostración, las fórmulas para las raíces del polinomio cúbico). Pero en el siglo XIX se probó que es imposible expresar mediante radicales las raíces de los polinomios de grado mayor que 5. Si de alguna forma podemos encontrar una raíz x_k de un polinomio, dividiéndolo por $(x - x_k)$ reducimos el problema de hallar sus raíces al de hallar las de un polinomio de grado menor. Por este camino es posible, en contadas ocasiones, calcularlas todas.

Tratemos ahora un caso en que sí se tienen fórmulas (complicadas) para las raíces: $P_3(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$, $p \neq 0$.

Veamos primero las diferentes formas que puede tener su gráfica. Como su derivada $P_3'(x) = 3px^2 + 2qx + r$ puede tener 2 raíces reales, 1 doble o ninguna real (dependiendo de que $R = q^2 - 3pr$ sea $>$, $=$ ó < 0), P_3 puede tener un máximo y un mínimo, un punto de inflexión con tangente horizontal o tener la derivada con signo constante.



Si P_3 tiene una raíz x múltiple debe ser $px^3 + qx^2 + rx + s = 3px^2 + 2qx + r = 0$. Eliminando la x entre las dos ecuaciones se obtiene la expresión de su discriminante $\Delta = q^2r^2 - 4pr^3 - 4q^3s + 18pqrs - 27p^2s^2$. Este se puede escribir de forma más compacta si llamamos $S = 27p^2s - 9pqr + 2q^3$, pues entonces se tiene que: $\Delta = 27^{-1}p^{-2}[4R^3 - S^2]$. Se puede probar que:

Si $\Delta = 0$, hay una raíz doble de P_3 dada por $x_d = \frac{1}{3p} [-q + [S/2]^{1/3}]$ y una simple $x_s = \frac{1}{3p} [-q - 2[S/2]^{1/3}]$.

Si $\Delta < 0$, existe una única raíz real: $x_r = -\frac{q}{3p} + \frac{1}{3p} \left[\frac{1}{2}(-S + \sqrt{S^2 - 4R^3}) \right]^{1/3} + \frac{1}{3p} \left[\frac{1}{2}(-S - \sqrt{S^2 - 4R^3}) \right]^{1/3}$.

Por último, si $\Delta > 0$ ($R > 0$), hay tres raíces reales de P_3 que se pueden expresar:

$$x_{1,2,3} = -\frac{q}{3p} + \frac{2\sqrt{R}}{3p} \cos \frac{2k}{3}, \quad k=0,1,2, \quad \text{siendo} \quad \cos = \frac{-S}{2R^{3/2}}, \quad [0, \pi]$$

Por ejemplo, para el polinomio de antes $P^*(x) = 2x^3 - x^2 - 12x + 6$ sin raíces enteras se tiene que

$$R=73, S=430, \Delta=12696, \sqrt{\Delta}=1.9227264, x_{1,2,3} = 2.449489, -2.449489, 0.500000$$

[los errores de redondeo de estos cálculos hacen aconsejable acudir a métodos numéricos incluso en estos casos]

[Fórmulas similares, pero aún más complicadas, se podrían dar para los polinomios de cuarto grado. Aquí nos limitamos a recordar que las raíces del sencillo polinomio $ax^4 + bx^2 + c$ se hallan fácilmente tras hacer $t=x^2$].

Pero en la mayoría de los casos no se podrán calcular las raíces exactas de un polinomio y habrá que acudir a métodos numéricos como los que veremos en 3.4 para calcularlas aproximadamente. Para aplicar estos métodos será importante primero saber cuántas raíces reales hay y más o menos donde están. Comenzamos acotándolas:

$$\text{Si } c \text{ es raíz real de } P_n(x), \text{ entonces } |c| \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{|a_n|} [|a_0| + \dots + |a_{n-1}|] \right\}$$

Pues $|c| = \frac{1}{|a_n|} [|a_0| |c|^{1-n} + |a_1| |c|^{2-n} + \dots + |a_{n-1}|]$. Si $|c| \geq 1$, $|c| \leq \frac{1}{|a_n|} [|a_0| + \dots + |a_{n-1}|]$, y si $|c| < 1$ está claro.

[las raíces del $P^*(x)$ de antes debían tener un valor absoluto menor que 9.5 (mala cota, pero algo es algo)]

Nuestro objetivo es separar las raíces reales de un P , es decir, conocer el número exacto de raíces y localizar intervalos (a,b) en los que sólo se encuentre una de ellas. El teorema de Bolzano da información, pero no basta: si encontramos un (a,b) con $P(a)P(b) < 0$, hay al menos una raíz en (a,b) (pero podría haber más de una e incluso podría haber raíces en intervalos con $P(a)P(b) > 0$). El siguiente resultado es fácil de aplicar pero suele dejar también bastantes dudas:

Ley de Descartes de los signos. Sea P un polinomio de grado n con término independiente no nulo:

Si r es el número de raíces reales positivas de P y s el número de cambios de signo en la sucesión de sus coeficientes, es $r \leq s$ y $s-r$ es un número par (o cero).

[Se tiene en cuenta la multiplicidad] [Cambiando x por $-x$ se obtiene el resultado análogo para las raíces negativas].

Por ejemplo, para P^* sus coeficientes $2, -1, -12, 6$ presentan $s=2$ cambios de signo. Esto significa, en principio, que tiene 0, 2 ó 4 raíces positivas. Cambiando x por $-x$ obtenemos $-2x^3 - x^2 + 12x + 6$; como $s=1$, seguro que hay una única negativa. Calculando el Δ , sabemos que hay 3 reales y con ello aseguramos que hay 2 positivas.

Para $P_4(x) = 9x^4 + 8x^3 + 28x^2 + 24x + 3$ podemos afirmar que no tiene raíces positivas ($s=0$) y como tras hacer x por $-x$ se tiene $1, -8, 28, -24, 3$ podrían existir 4, 2 ó 0 raíces negativas.

Demostramos Descartes (en el caso más simple: $a_k \geq 0$ $k=0, \dots, n$): Podemos suponer $a_n > 0$. Inducción sobre n . Es cierto para $n=1$: $a_1x + a_0 = 0$ tiene una raíz positiva ($r=1$) si a_1 y a_0 tienen signos opuestos ($s=1$); y $r=0$ si $s=0$. Supongámoslo cierto para polinomios de orden $n-1$ y demostrémoslo para los de n : Sean s' y r' los números de cambios y raíces para P' . Si $sg(a_1) = sg(a_0)$, es $s=s'$, y como (fácil de ver) $(-1)^r$ y $(-1)^{r'}$ son los signos de sus términos independientes, r y r' tienen la misma paridad; si $sg(a_1) \neq sg(a_0)$, $s=s'+1$ y r es de paridad opuesta a r' ; en ambos casos, $s-r$ y $s'-r'$ tienen la misma paridad; como para P' (de orden $n-1$) estamos suponiendo cierto Descartes, deducimos que $s-r$ es par. No es difícil deducir de Rolle, además, que $r' = r$ o $r' = r-1$, respectivamente, en los casos de antes; de ahí se obtiene que en ambos casos es $s-r = s'-r'$, número que estamos suponiendo positivo.

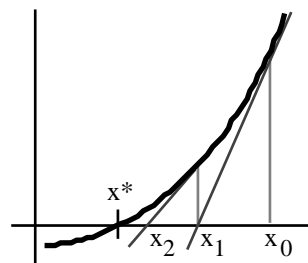
3.4. CEROS DE FUNCIONES

Muchas veces es necesario determinar los ceros de una función f , es decir, los x^* tales que $f(x^*)=0$. Pero, como vimos, ni siquiera si f es un polinomio se tienen siempre fórmulas para calcular sus raíces. Mucho menos si f es una función trascendente como $f(x)=e^x+x^3$. Se tratará entonces de calcular los ceros de forma aproximada.

El teorema de Bolzano puede ser un camino para aproximar x^* : encontrando un intervalo $[a,b]$ de pequeña longitud tal que $f(a)f(b)<0$ estamos seguros de que al menos hay un x^* (a,b) con $f(x^*)=0$ (que será el único si f' es >0 ó <0 que 0 en ese intervalillo). Pero mucho más rápido será, normalmente, otros caminos como el

Método de Newton.

La idea de este método es simple. Supongamos que para una f como la de la figura sabemos que el cero x^* se parece más o menos a x_0 . Aproximando la gráfica con la tangente en $(x_0, f(x_0))$ obtenemos un x_1 (punto en que la recta corta el eje), probablemente más cercano a x^* que el x_0 inicial. Repitiendo el proceso con x_1 obtenemos un x_2 , luego un x_3 , ... siendo esperable que la sucesión $\{x_n\}$ converja rápidamente hacia x^* .



Hallemos una fórmula que nos expresará cada término de esta sucesión en función del anterior. Como la tangente en $(x_n, f(x_n))$ es $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$ el corte de esta recta con $y=0$ nos da la siguiente aproximación. Por tanto:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

[En la fórmula se ve que las cosas pueden ir mal si f/f' es grande cerca de x^* ; se puede demostrar que una condición suficiente para asegurar la convergencia del método es que $|f(x)f''(x)/[f'(x)]^2| < 1$ en un intervalo que contenga a x^*].

Ejemplos.

Hallemos aproximadamente las raíces reales de $P(x) = x^4 - 2x^2 + 4x - 2$ (exactamente no sabemos).

La ley de Descartes nos asegura que hay o 3 o 1 raíces positivas $(+ - + -)$ y exactamente 1 negativa $(+ - - -)$. Vamos a intentar hacernos una idea de su gráfica para ver si podemos determinar cuántas raíces positivas tiene y localizar intervalos en los que buscarlas. Para ello empezamos estudiando sus derivadas:

$P'(x) = 4[x^3 - x + 1]$ (sin raíces enteras; 2 ó 0 raíces positivas y una negativa (seguimos con dudas, por ahora))

$P''(x) = 4[3x^2 - 1] = 0 \quad x = \pm 1/\sqrt{3}$ [puntos de inflexión de P y máximos o mínimos de P']

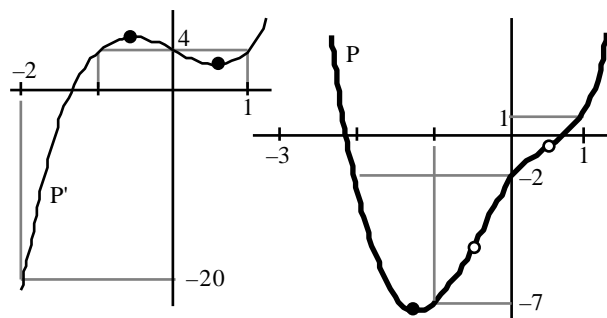
$P'(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4[1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}] \approx 5.5$; $P'(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 4[1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}] \approx 2.5$

$P'(-3) = -92$, $P'(-2) = -20$, $P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 4$

Con esto ya podemos pintar la gráfica de P' . Vemos que: P' tiene un único cero en $(-2, -1)$ [$P'' > 0$ en $(-2, -1)$] y no tiene más. Por tanto, P tiene un único mínimo entre -2 y -1 . A partir de él P crece sólo hay 1 raíz positiva de P . Para localizar un poco mejor las dos raíces de P :

$P(-3)=49$, $P(-2)=-2$, $P(-1)=-7$, $P(0)=-2$, $P(1)=1$

Existe un cero de P en $[-3, -2]$ y otro en $[0, 1]$.



Aplicamos ahora el método de Newton para aproximar las raíces. Primero la de P' : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$.

Elegiendo como primera aproximación $x_0=1$ vamos obteniendo:

$x_1=-1.5$; $x_2=-1.347826087$; $x_3=-1.325200399$; $x_4=-1.324718174$; $x_5=-1.324717957$;

y los posteriores x_n tienen esos mismos 9 decimales [es curioso ver lo que ocurre si elegimos $x_0=0$].

Los ceros de P los obtenemos con $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 2x_n^2 + 4x_n - 2}{4[x_n^3 - x_n + 1]}$, obteniendo con los x_0 indicados:

$x_0=0$, $x_1=0.5$, $x_2=0.675$, $x_3=0.6764448966$, $x_4=0.6764442885$; x_5, x_6, \dots no modifican los decimales.

$x_0=-2$, $x_1=-2.1$, $x_2=-2.090744197$, $x_3=-2.090657858$, $x_4=-2.090657851$; x_5, \dots con iguales decimales.

Como segundo ejemplo del método de Newton, obtengamos una sucesión de x_n que tienden hacia $\sqrt[n]{a}$.

Para ello buscamos los ceros de $x^n - a$. Tenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^n - a}{n x_n^{n-1}} = \frac{1}{n} \left[(n-1)x_n + \frac{a}{x_n^{n-1}} \right] \quad (\text{es el llamado algoritmo de Herón para calcular raíces})$$

Así, para calcular $\sqrt[3]{12345}$, y partiendo de algún número que no esté muy lejos, por ejemplo $x_0=20$, obtenemos:
 $x_1=23.62083333$, $x_2=23.12251744$, $x_3=23.11162389$, $x_4=23.11161875=x_5=x_6=\dots$

Veamos ahora otro método de aproximación de ceros de tipo de funciones particulares que, aunque además sea más lento que el de Newton, tiene el interés de que es aplicable en matemáticas más avanzadas a problemas mucho más generales.

Sea $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$, con $c < 1$, $x, y \in [a,b]$. Una f así se dice contractiva en $[a,b]$.

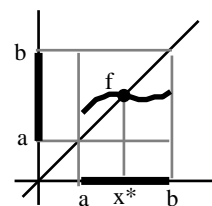
Una f contractiva es continua en $[a,b]$: $|f(x)-f(y)| < c$ si $|x-y| < c$.

Podemos asegurar entonces que existe un único x^* tal que $x^* = f(x^*)$

(a un x^* con esa propiedad se le llama punto fijo de f):

Aplicando Bolzano a $g(x)=x-f(x)$, como $g(a) < 0 < g(b)$ existe el x^* .

Si hubiera otro $y^*=f(y^*)$ sería $|f(x^*)-f(y^*)| = |x^*-y^*| \leq c|x^*-y^*|$ $x^*=y^*$.



Además existe una forma muy fácil de aproximar el x^* pues:

Para cualquier $x_0 \in [a,b]$, la sucesión $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$ converge a x^* .

En efecto, llamemos x_n al resultado de aplicar n veces f a x_0 . Vamos a ver que x_n es de Cauchy:

veamos primero que $|x_n - x_{n+1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq c|x_{n-1} - x_n| \leq \dots \leq c^n |x_0 - x_1|$;

por tanto, si $m > n$, $|x_m - x_n| \leq |x_{m+1} - x_m| + \dots + |x_n - x_{n-1}| \leq [c^m + \dots + c^{n-1}] |x_1 - x_0| = \frac{c^m - c^n}{1 - c} |x_1 - x_0|$,

que se puede hacer tan pequeño como queremos tomando m y n suficientemente grandes ($c^m, c^n \rightarrow 0$).

Como x_n es de Cauchy tiene límite x^* y se tiene que $f(x^*) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x^*$.

La forma más fácil de ver que una $f: [a,b] \rightarrow [a,b]$ es contractiva es ver que el máximo M de $|f'(x)|$ en $[a,b]$ es menor que 1, pues, por el teorema del valor medio, $|f(x)-f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq M|x-y|$ con $M < 1$.

Como ejemplo, calculemos el único $x \in [0,1]$ tal que $\cos x = x$

$\cos x$ es contractiva: su imagen está contenida en $[0,1]$ y $|\sin x| \leq 1 < 1$.

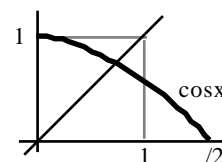
Así pues, podemos hallar el x^* sin más que apretar la tecla del coseno de una calculadora a partir de cualquier $x_0 \in [0,1]$. Por ejemplo, si $x_0=1$ vamos obteniendo:

0.54030231, 0.85755322, 0.65428979, 0.79348036, 0.70136877, 0.76395968, 0.7221024, 0.75041776

Después de apretar 20 veces obtenemos 0.73918440; tras apretar 40 veces, 0.73908517 ...

El método de Newton nos da el cero buscado mucho más rápidamente. Haciendo $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$ con $x_0=1$,

se tiene en pocos pasos: $x_1=0.7503638678$, $x_2=0.7391128909$, $x_3=0.7390851334$, $x_4=0.7390851332=x_5=\dots$

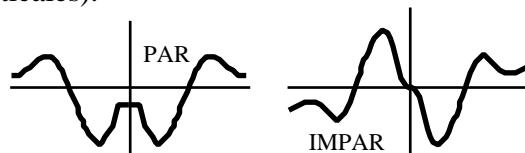


3.5. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Cada función pide un tratamiento diferente. Las siguientes ideas no quieren ser una receta que haya que seguir desde el principio hasta el final. Por ejemplo, no tiene sentido buscar asíntotas verticales en una función continua en todos los puntos o empeñarse en calcular derivadas muy complicadas. La práctica en el dibujo de gráficas nos irá sugiriendo los tipos de cálculos a realizar en cada caso. Es importante tener claras las gráficas de las funciones elementales.

- Determinación del dominio, y de los puntos en que f no es continua (posibles saltos de la función) o no derivable (picos de la gráfica, pendientes verticales).

- Simetrías: Si $f(-x)=f(x)$, función par, la gráfica de f es simétrica respecto al eje $x=0$.
Si $f(-x)=-f(x)$, función impar, la gráfica de f es simétrica respecto al origen.



- Periodicidad (sólo para algunas funciones trigonométricas): si $f(x+T)=f(x)$ basta pintar la gráfica en un intervalo de longitud T pues luego se repite periódicamente.
- Asíntotas: Verticales (rectas $x=c$): f tiende a $+$ ó $-$ cuando $x \rightarrow c^-$ ó $x \rightarrow c^+$ (bastantes veces se puede calcular de una vez el límite cuando $x \rightarrow c$, pero muchas son precisos los laterales). Horizontales (rectas $y=c$): f tiende a c cuando $x \rightarrow +$ ó cuando $x \rightarrow -$.

Si no existen asíntotas horizontales (y la forma de la función lo aconseja) intentaremos escribir $f(x)=g(x)+h(x)$, con g función conocida y $h(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +$ (ó $-$). Entonces la gráfica de f se parecerá a la de g para x muy grandes (ó muy negativos). En particular, hallaremos así las posibles asíntotas oblicuas, sin recetas de memoria.

[En ocasiones todos estos límites se podrán calcular con los teoremas del capítulo 2 (los del tipo " $\frac{0}{0}$ " o " $\frac{\infty}{\infty}$ "), pero si son indeterminados habrá que recurrir a L'Hôpital o Taylor (4.4); los desarrollos de Taylor, por otra parte, darán idea de la forma de la función cerca de un punto].

- Información a partir de las derivadas (utilizando los teoremas de 3.2):

A partir de la f' : intervalos de crecimiento y decrecimiento ($f'>0$ y $f'<0$); puntos x en los que f posee extremos locales (si $f'(c)=0$, para ver si f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión con tangente horizontal en c , es muchas veces más fácil precisar el signo de f' antes y después de c que calcular la f'' y sustituirla en c ; incluso, en ocasiones, basta dar valores a f' en la proximidad de c para verlo; puede haber extremos en puntos sin derivada).

A partir de la f'' : puntos de inflexión ($f''(c)=0$, aunque esto pueda no bastar); intervalos de concavidad y convexidad.

[Observemos que puede ser imposible determinar explícitamente los ceros de la f' y la f'' . Intentaremos entonces localizar cuántos ceros hay y en qué intervalos están (Bolzano puede ayudar). En bastantes ocasiones esos ceros serán raíces de polinomios (y serán aplicables las ideas de 3.3). El método de Newton de 3.4 nos permite aproximar los ceros con la precisión deseada si disponemos de una calculadora (mejor programable) u ordenador].

- Valores concretos de $f(x)$: Valores de f en $x=0$ (corte con el eje y); en los x tales que $f'(x)=0$ o en los x del dominio en los que no exista la f' , en puntos cercanos a estos x ; en los x tales que $f''(x)=0$; en x de zonas en las que sepamos poco de la gráfica.

Valores de x para los que $f(x)=0$ (cortes con el eje x , tal vez no calculables como ocurriría con los ceros de f' y f''), deduciendo los intervalos en que $f(x)$ es positiva o negativa.

En ocasiones conviene también dar valores de f' (pendiente de la gráfica) en algún punto.

Hay funciones complicadas para las que casi todo fallará y habrá que limitarse a dar valores (en ese momento serán especialmente útiles las calculadoras y los ordenadores). Al final del capítulo 4 (cuando dominemos Taylor y los límites complicados) dibujaremos alguna gráfica más.

Las gráficas de $f(x)+c$, $f(x+c)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $cf(x)$, $f(cx)$, $|f(x)|$ y $f(|x|)$ se deducen de la de $f(x)$:

La gráfica de $g(x)=f(x)+c$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia arriba (si $c>0$) o abajo ($c<0$).

La de $g(x)=f(x+c)$ es la de $f(x)$ trasladada c unidades hacia la izquierda (si $c>0$) o derecha ($c<0$).

La de $g(x)=-f(x)$ es la reflexión de la gráfica de $f(x)$ respecto a $y=0$.

La de $g(x)=f(-x)$ es la reflexión de la de $f(x)$ respecto a $x=0$.

La de $g(x)=cf(x)$ con $c>1$ ($0<c<1$) es la de $f(x)$ estirada (comprimida) verticalmente.

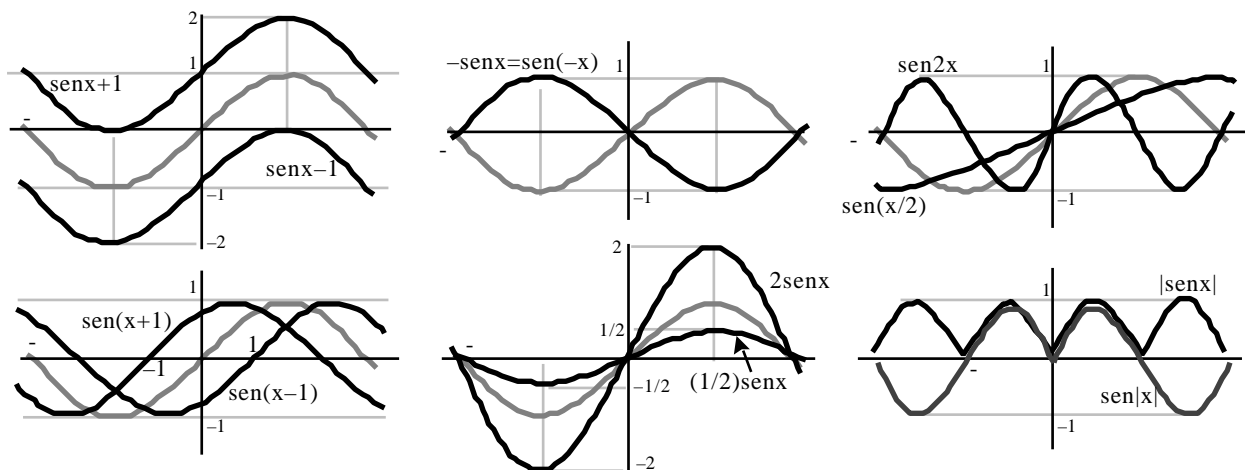
La de $g(x)=f(cx)$ con $c>1$ ($0<c<1$) es la de $f(x)$ comprimida (estirada) horizontalmente.

La de $g(x)=|f(x)|$ se obtiene reflejando hacia arriba las partes de la de $f(x)$ que están bajo el eje x .

La de $g(x)=f(|x|)$ es la parte de la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$ y más su reflejo respecto a $y=0$.

Por ejemplo, de la gráfica de $\sin x$ (dibujada a puntos) deducimos las gráficas de:

$\sin x+1$, $\sin x-1$, $\sin(x+1)$, $\sin(x-1)$, $-\sin x$, $\sin(-x)$, $2\sin x$, $\frac{1}{2}\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin\frac{x}{2}$, $|\sin x|$ y $\sin|x|$:

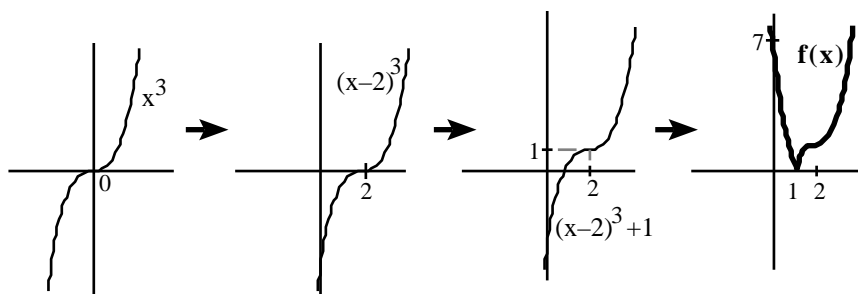


Un ejemplo que emplea varias de las ideas anteriores:

$$f(x) = |(x-2)^3 + 1|$$

[Más complicado es dibujar las dos funciones que define:

$$\begin{aligned} & x^3 - 6x^2 + 12x - 7, \text{ si } x \geq 1, y \\ & -x^3 + 6x^2 - 12x + 7, \text{ si } x < 1 \end{aligned}$$



Dos funciones cuya gráfica no ofrece excesivas dificultades:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^4} \quad \text{par, } \text{dom}f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad f'(x) = \frac{2x^2-4}{x^5}, \quad f''(x) = \frac{20-6x^2}{x^6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad \text{Extremos: } x = \pm\sqrt{2} \quad 1.41, \quad f(\pm\sqrt{2}) = -0.25.$$

$$\text{Puntos de inflexión: } i_{\pm} = \pm\sqrt{10/3} \quad \pm 1.8, \quad f(i_{\pm}) = -0.21.$$

$$f(x)=0 \quad x=\pm 1, \quad f(1/2)=12, \quad f(\sqrt{2}/2)=2, \quad f(2)=-\frac{3}{16} \quad -0.19.$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = \frac{|x|}{\sqrt{x+1}}. \quad h(x) \geq 0 \quad x \in \text{dom}h = (-1, \infty)$$

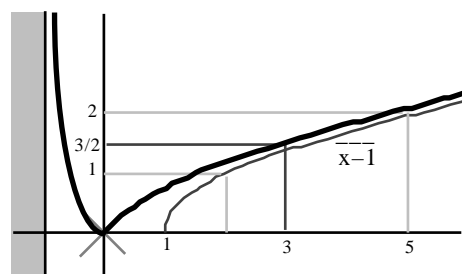
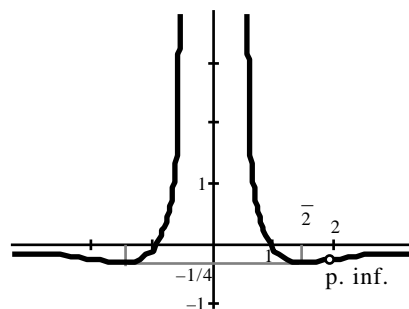
$$h'(x) = \frac{-[x+2]}{2[x+1]^{3/2}} \quad \text{si } -1 < x < 0; \quad h'(x) = \frac{[x+2]}{2[x+1]^{3/2}} \quad \text{si } x > 0$$

$$[\text{decrece}]; \quad h'(0^-) = -1 \quad [\text{crece}]; \quad h'(0^+) = 1$$

$$h''(x) = \frac{-[x+4]}{4[x+1]^{5/2}} \quad \text{si } -1 < x < 0; \quad h''(x) = \frac{[x+4]}{4[x+1]^{5/2}} \quad \text{si } x > 0$$

$$h(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+1} \quad [\text{se parece a } \sqrt{x-1} \text{ para } x \text{ grande}]$$

$$h(x) \geq 0 \quad \text{si } x \geq -1^+; \quad h(0)=0, \quad h(-1/2)=\sqrt{2}/2=h(1), \quad h(3)=3/2.$$



Dibujamos ahora dos de los ejemplos manejables de 3.1:

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{con } g(0)=0 \text{ para que } g \text{ sea continua.}$$

$g(-x) = -g(x)$: impar. De las derivadas se saca poco:

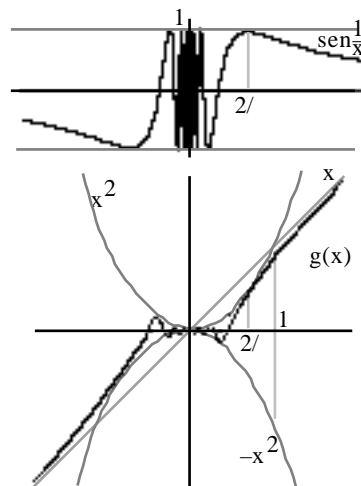
$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = 0 \quad \tan \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} \quad (\text{infinitos cortes})$$

Pero podemos dar infinitos valores a la función:

Como $\sin \frac{1}{x} = 1$ $x = \frac{2}{[4n+1]}$; $\sin \frac{1}{x} = -1$ $x = \frac{2}{[4n-1]}$, la gráfica de g toca en esos x la de x^2 y la de $-x^2$; para los demás x la gráfica oscila entre ambas. $\sin \frac{1}{x} = 0$ $x = \frac{1}{n}$.

Como $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ si x gordo sospechamos que $g(x) \sim x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [g(x) - x] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0 \quad (\text{sabremos hacerlo por L'Hôpital o Taylor})$$

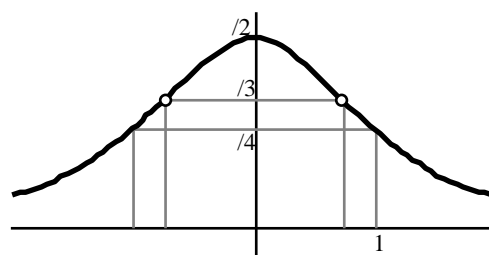


$$n(x) = \arctan \frac{1}{x^2}, \quad k(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{Par. } k(x) \sim 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$k'(x) = \frac{-2x}{x^4+1} \quad k \text{ crece si } x < 0 \text{ y decrece si } x > 0; \quad k'(0)=0.$$

$$k''(x) = 2 \frac{3x^4-1}{[x^4+1]^2} \quad \text{cóncava si } |x| > 3^{-1/4} \approx 0.76.$$

$$\text{Valores: } k(1) = \pi/4, \quad k(3^{-1/4}) = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$$



Dos últimos ejemplos con dificultades para hallar ceros:

$$l(x) = x^3 + 6 \log(2-x) \quad \text{dom } l = (-\infty, 2); \quad l(x) \rightarrow -\infty \text{ si } x \rightarrow 2^- \text{ ó } x \rightarrow -\infty$$

$$[x^3 + 6x^{-3} \log(2-x)]_x = -\frac{1}{x^4} \cdot [1+0] = -\frac{1}{x^4} \quad (\text{L'Hôpital})$$

$$l'(x) = 3x^2 - \frac{2x^2+2}{x-2} = 0 \quad P(x) = x^3 - 2x^2 + 2 = 0 \quad ??$$

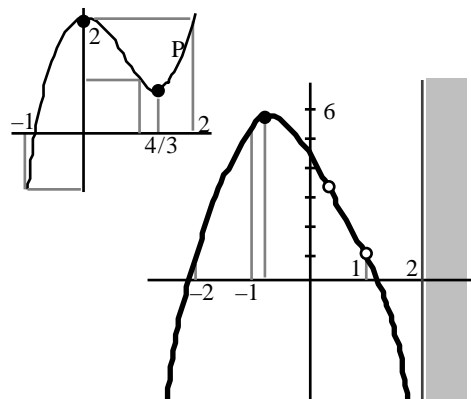
$++$ (0 ó 2 raíces positivas ??); $+-$ (1 negativa [máx de 1]);

$P'(x) = 3x^2 - 4x$, $P(4/3) = 22/27 > 0$, $P(0) = P(2) = 2$, $P(\pm 1) = \pm 1$
raíz de P [máx] en $c \in (-1, 0)$ [Newton: $c \approx -0.84$]; no mínimos.

$$l''(x) = 6 \frac{[x-1][x^2-3x+1]}{[x-2]^2} = 0 \quad \text{si } x=1 \text{ ó } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.4 \quad [\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ dom}]$$

l convexa () entre los 2 p.inf. y cóncava en el resto de dom l .

$$l(1)=1, \quad l(0)=6 \log 2 \approx 4.1, \quad l(-1)=6 \log 3 - 1 \approx 5.6, \quad l(-2)=12 \log 2 - 8 \approx 0.3$$



$$k(x) = x \log|x-2| \quad k_x = \log|x-2|, \quad k_x = \frac{x}{x-2}, \quad k_x = -\frac{x}{x-2}$$

dom $k = \mathbb{R} - \{2\}$; $k(0)=k(1)=k(3)=0$, $-k(-2)=k(4)=4 \log 2 \approx 2.8$
[Rolle asegura que existe al menos un cero de k' en $(0,1)$]

$$k'(x) = \log|x-2| + \frac{x}{x-2}; \quad k''(x) = \frac{x-4}{[x-2]^2}.$$

$x=4$ inflexión, $x < 4$ cóncava, $x > 4$ convexa.

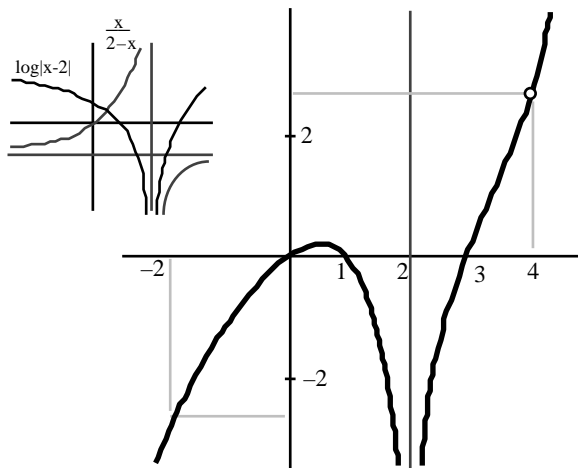
$k'=0$ donde se corten las gráficas de $\log|x-2|$ y $\frac{x}{2-x}$.

$$k'(0)=\log 2 \approx 0.7, \quad k'(1)=-1 \quad \text{máximo en un } c \in (0,1)$$

[utilizando Newton para k' con $x_0=0.5$:

$$x_1=0.546370, \quad x_2=0.545267=x_3=x_4=\dots]$$

Cerca de $x=2$ no se anula k' pues $k' \sim \frac{1}{x-2}$ si $x \rightarrow 2^+$,
 $k'(3)=3$ y k' decrece en $(2,3)$.



3.6. APLICACIONES

Tangentes a curvas.

Hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(5,3)$.

Má corto que despejar la y derivar la raíz resultante, derivamos implícitamente considerando la y como función de x :

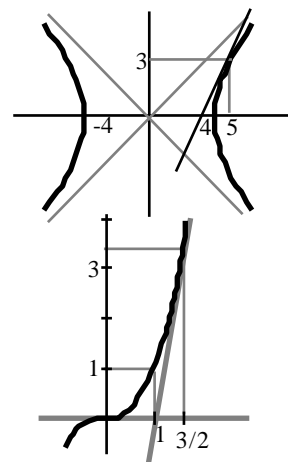
$$2x - 2yy' = 0 \quad y'(x) = \frac{x}{y} \quad \text{Si } x=4, y=3 \text{ es } y' = \frac{5}{3} \quad y = 3 + \frac{5}{3}(x-3), \quad \boxed{5x - 3y = 16}$$

¿Para qué puntos de la curva $y = x^3$ la recta tangente pasa por $(1,0)$?

$$y' = 3x^2 \quad \text{Recta tangente en el punto } (a, a^3): y = a^3 + 3a^2(x-a) = 3a^2x - 2a^3.$$

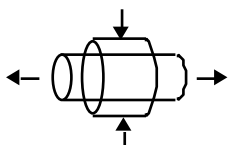
$$\text{Pasa por } (1,0) \text{ si } 3a^2 - 2a^3 = 0 \quad a=0, a=\frac{3}{2} \quad \text{puntos } (0,0) \text{ y } \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$$

$$[\text{rectas tangentes respectivas: } y=0 \text{ e } y = \frac{27}{4}(x-1)]$$



Ritmos de cambio.

Un cilindro se comprime lateralmente y se estira, de modo que el radio de la base decrece a un ritmo de 3cm/seg y la altura crece a 8cm/seg. Hallar el ritmo al que está cambiando el volumen cuando el radio es 5cm y la altura 7cm.



$$\text{El volumen del cilindro es } V = r^2 h \quad \frac{dV}{dt} = [r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt}] = 2[r(4r-3h)]$$

$$\text{Cuando } r=5 \text{ y } h=7, V' = -10 \text{ cm}^3/\text{seg} \text{ (el volumen decrece en ese momento)}$$

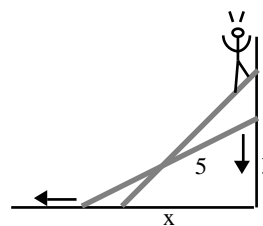
Una escalera de 5m de largo permanece apoyada sobre una pared vertical y su extremo inferior se está alejando del pie de la pared a una velocidad constante de 2m/s. Hallar la velocidad a la que desciende la parte superior cuando el extremo inferior está a 4m de la pared.

Sea y la distancia al suelo de la parte superior y x la distancia de la parte inferior a la pared. Por pitágoras es: $y = [25 - x^2]^{1/2}$. Entonces

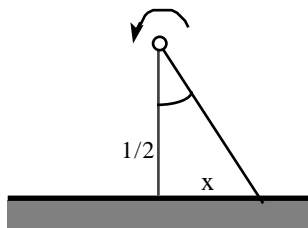
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}} \quad \text{Cuando } x=4 \text{ es } \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}.$$

$$\text{Por tanto el extremo de la escalera cae en ese instante a } \boxed{\frac{8}{3}} \text{ m/s.}$$

[Curiosidad, si $x = 5$ la velocidad de caída (!?)]



La luz de un faro situado a 1/2Km de la una costa recta gira con un periodo de 12 segundos. Hallar la velocidad con la que la luz se mueve por la costa: i) en el punto P más cercano al faro, ii) en un punto situado a 2 Km de P, iii) un segundo después de pasar la luz por P.



Sean θ el ángulo y x la distancia descritos en el dibujo. Se tiene que $x = \frac{1}{2} \tan \theta$.

La velocidad de crecimiento de θ es $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{6}$ radianes por segundo.

$$\text{La velocidad de la luz sobre la costa es } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{12} (1 + 4x^2)$$

$$\text{i) en P, } \theta = 0, x=0 \quad \boxed{x' = \frac{1}{12} \text{ Km/seg}} \quad 942 \text{ Km/h ;}$$

$$\text{ii) } x=2 \quad \boxed{x' = \frac{17}{12} \text{ Km/seg}} \quad 16022 \text{ Km/h ; iii) } \theta = \frac{\pi}{6} \quad x' = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{9} \text{ Km/seg}} \quad 1257 \text{ Km/h.}$$

Máximos y mínimos.

Determinar (si existen) dos números positivos cuyo producto sea 1 y tales que su suma sea i) máxima, ii) mínima

Sean los dos números x y $1/x$.

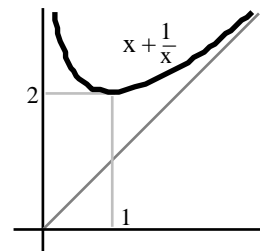
Hay que buscar los extremos de $S(x) = x + \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, \infty)$

[como no es un intervalo cerrado podrían no existir].

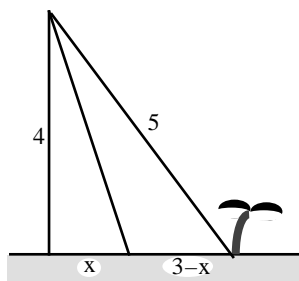
$$S'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad x=1 \quad (x=-1 \text{ no sirve}) ; S''(x) = \frac{2}{x^3} \quad S''(1) = 2$$

hay, pues, un mínimo local en $x=1$. S derivable para todo x de $(0, \infty)$,
 $S(x)$ cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$ no hay máximo.

Así pues el mínimo (absoluto) se da si $x = \frac{1}{x} = 1$ (la suma es entonces 2)



Un nadador se halla en el mar a 4 km de una playa recta y a 5 km de una palmera situada en la playa junto al mar. Si nada a una velocidad de 4 km/h y camina por la playa a 5 km/h, ¿cuál es el tiempo mínimo que debe emplear para llegar hasta la palmera?



El tiempo empleado en nadar hacia un punto situado a una distancia x de la perpendicular y luego caminar hasta la palmera es

$$T(x) = \frac{\sqrt{16+x^2}}{4} + \frac{3-x}{5} \quad \text{con } x \in [0, 3] \quad T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{16+x^2}} - \frac{1}{5}$$

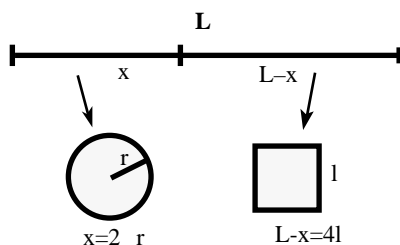
[si $x=0$ tarda más seguro y si $x=3$ no vale la expresión de $T(x)$]

$$T'(x)=0 \quad \frac{25}{16}x^2=16+x^2 \quad x=\frac{16}{3} \quad (>3!), \quad x=-\frac{16}{3} \quad (\text{no cumple } T'=0)$$

$$\text{Máximo en un extremo: } T(3) = \frac{5}{4} < T(0) = \frac{8}{5} \quad [T(\frac{16}{3}) = \frac{6}{5} \text{ es mentira}]$$

[debe nadar hacia la palmera (si ésta estuviese lejos sí convendría atajar)]

Con un alambre de longitud L se forman un cuadrado y una circunferencia. ¿Cuánto alambre debe emplearse en cada figura para que la suma de sus áreas sea i) máxima, ii) mínima?



$$\text{Área total} = r^2 + l^2 = \frac{[L-x]^2}{16} + \frac{x^2}{4} = \frac{(4-x)^2 - 2Lx + L^2}{16} = A(x)$$

$x \in [0, L]$; A derivable en $(0, L)$ los máximos y mínimos (que existen, por ser A continua en $[0, L]$) se alcanzarán o bien en los extremos del intervalo o bien cuando $A'(x)=0$:

$$A'(x) = \frac{(4-x)x - L}{8} = 0 \quad x^* = \frac{L}{4} = 0.44L$$

Como $A'(x) < 0$ si $x < x^*$, $A'(x) > 0$ si $x > x^*$, el mínimo se toma en x^* y como $A(L) = \frac{L^2}{4} > A(0) = \frac{L^2}{16}$ el máximo se da para $x=L$:

i) el área máxima se consigue si se emplea todo el alambre para hacer el círculo ($A = 0.08L^2$)

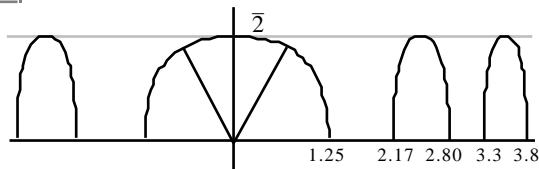
ii) la mínima si aproximadamente se usa el 44% para el círculo y el 56% para el cuadrado ($A = \frac{L^2}{4(4+)} = 0.035L^2$)

Hallar el punto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2\cos x^2}$ más cercano al origen.

Determinamos primero su dominio y dibujamos su gráfica.

$$\cos x^2 \geq 0 \quad x^2 \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \quad [\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}] \quad \dots$$

$$\text{dom } f = \dots \quad [-\sqrt{\frac{5\pi}{2}}, -\sqrt{\frac{3\pi}{2}}] \quad [-\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}] \quad [\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}] \quad \dots$$



Mejor que minimizar la distancia, minimizamos la distancia al cuadrado (que es lo mismo y evita derivar raíces).

$$\text{Sea } d(x) = [d((0,0), (x, f(x)))]^2 = x^2 + 2\cos x^2 ; d'(x) = 2x(1 - 2\sin x^2) = 0 \quad x=0 \text{ ó } \sin x^2 = \frac{1}{2}$$

El valor mínimo evidentemente está en el intervalo $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$. Candidatos son además estos extremos.

$$d(0)=2, \quad x^2 = \frac{\pi}{6} \quad d(\pm\sqrt{\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \quad 2.26, \quad d(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} \quad 1.57 \quad \text{puntos más cercanos } (\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0)$$